オイコノミカ　第39巻　第2号，2002年，pp. 1-21

内生的出生率を持つ男女分業モデルの動学的分析*

斉　　　　玲

序

本論文では，家庭内の男女分業による，内生的出生率を持つ経済成長モデルの動学的分析を行う．

まず，この問題に関連する先行論文をレヴューしておこう．Barro and Becker（1989）は異世代間利他主義が存在するという仮定の下で t 王朝（t 世代とその子孫からなっている）の効用は t 世代の効用とその後継者である $t+1$ 王朝の効用の加重和として定まるというモデルを提案した．そして異世代割引率が $\beta(n)=n^{1-\varepsilon}$ であるという仮定の下で，物的資本はどの初期値からでも一期間で定常解に達することを証明し，定常解について静学的分析を行った．また，Benhabib and Nishimura (1989) は異世代割引率 $\beta(n)$ を $\beta(n)$ が $0\leq\beta(n)<1$；$\beta'(n)>0$；$\beta''(n)<0$ を満たす出生率 n の関数であると仮定した．その仮定の下で，(1)資本の最適経路は一期間では定常解に達せず，資本の移行を生じること，そして，(2) $\beta(n)/\beta'(n)$ の n に関する弾力性を e とするとき，$e>1$ であるとき，資本の最適経路は単調で，定常解に収束し，$e<1$ のとき，資本の最適経路は振動しながら定常解に収束し，$e=1$ のとき，一期間で資本最適経路は定常解に達すること，を証明した．

一方，金谷貞男（2000）は市場財生産における男性優位の仮定の下で男女分業というモデルを設定し，生産可能フロンティアにおいて静学的分析を行った．そこでは男女が家庭を築いて分業で市場財の生産と家事サービスを担い，子供を産み育てるものと想定され，一対の配偶者からなる家族を一単位の家計とし，その家計の効用はその王朝の効用であるとし，後継者の一単位は男児一人，女児一人を意味するものとされた．そして，Barro and Becker（1989）のモデルに，人的資本を導入し，男女分業のモデルを動学分析に拡張することを提案している．

以上のような先行論文を踏まれて，本稿は金谷貞男（2000）の提案に基づいて，家庭内の男女分業モデルの動学的分析を行おうとするものである．分析は Barro and Becker（1989），

＊　本稿を作成する過程において，西村和雄教授，宮原孝夫教授，多和田真教授と金谷貞男教授には多くのご指導を受けました．また，三澤哲也教授と外谷英樹助教授には，セミナーで聞いて頂き，貴重なコメントを頂きました．記して感謝申し上げます．

Benhabib and Nishimura (1989) の内生的出生率モデルに，男女間の分業を考慮に入れることより導かれる生産関数を用いて行われる.本稿で得られた主たる結果は次のようなものである.まず，Benhabib and Nishimura の条件の下で，人的資本の最適経路が増加経路で，定常解に収束することを証明する (定理 3-4). さらにこの分業モデルには人的資本の低い定常解と人的資本の高い定常解の 2 つの定常解が存在することを証明する (命題 4-5). そして人的資本の低い定常解では，女性が教育を受けられず，市場財の生産にも参加しないことと人的資本の高い定常解では，女性が教育を受け，市場財の生産にも参加することを明らかにする (命題 4-5).

なお，Barro and Becker (1989)，Benhabib and Nishimura (1989) のモデルでは効用関数が次期の資本と出生率に対して凹関数とはなっていないため，最適問題の解は一意的ではない可能性起っている. しかし，我々の分業モデルにおける生産関数は出生率 n の関数であるため，効用関数は次期の人的資本と出生率の凹関数となり，最適問題の解が一意的に存在する (Qi (2002) を参照). また，Benhabib and Nishimura (1989) では最適解の一意的存在と価値関数の微分可能性が仮定されているが，本稿ではこの仮定を置いていない. そして，結果的に，生産関数の 2 階偏微分可能である区間で最適解が一意的に定まること，及び価値関数の微分可能性が成立することを証明している (定理 2).

1. モ デ ル

本稿で扱うモデルは，家庭内の男女分業を考慮に入れて，市場財の生産と同時に家事サービスや子育てをする場合の分析をするためのモデルである. そこでは，男性は優先的に教育を受けるものとし，男性が最大限度の教育を受けた後，はじめて女性は教育を受けることができるものと仮定する. 女性は子供を生み，育児をすることに加えて家事サービスもする. さらに市場財の生産への参加も可能であるとする. 男性は市場財の生産を行うがその他に家事サービスをする可能性もある. 市場財の生産は，それに費やされる時間と人的資本に依存して定まり，最終財は市場財と家事サービスより生産される. その最終財の一部は消費され，残りは次期の人的資本ストックに投資される. 消費者の一生を T とし，子供一人を育てるのに要する時間を t_0 とする. 子供の数を n とする. h_m 及び h_f は男性と女性がそれぞれ持っている人的資本とし，t_{cm} と t_{cf} を男•女それぞれが市場財の生産に携わる時間とする. $\theta_m \equiv \dfrac{t_{cm}}{T}$，$\theta_f \equiv \dfrac{t_{cf}}{T-nt_0}$ とおくと，それは男・女それぞれが市場財の生産に携わる時間の割合である.

以下の仮定の下で消費財の生産関数は

$$c=c(h_m,\ \theta_m,\ h_f,\ \theta_f,\ n)=A_{cm}h_m\theta_m T+A_{cf}h_f\theta_f(T-nt_0)$$

で与えられ，家事サービスの生産関数は

$$x=x(\theta_m,\ \theta_f,\ n)=A_{xm}(1-\theta_m)T+A_{xf}(1-\theta_f)(T-nt_0)$$

で表されるものとする．ここで，A_{cm}，A_{xm} と A_{cf}，A_{xf} は男•女それぞれの市場財と家事サービスに対する生産性である．

最終財の生産関数 $F(h, n)$ は

$$F(h, n)=c^{\gamma}x^{1-\gamma}$$

の形であると仮定する．ここで，$0<\gamma<1$ とする．

消費者の効用最大化問題は Barro and Becker（1989）より，

$$\max_{\{(h_t, n_t)\}} \sum_{t=1}^{\infty} \Pi_{\tau=1}^{t-1}\beta(n_\tau)u[F(h_t, n_t)-n_t h_{t+1}] \tag{1}$$

を満たす $\{(h_{t+1}, n_t),\ _{t=1,\ 2,\ \ldots}\}$ を求める問題として定式化される．ここで $0\leq\beta(n)<1$ は異世代間の効用の割引率である．

2．生産関数と最適解の存在性

この節で，妥当と思われる仮定の下で男女の家庭内分業のモデルの生産関数 $F(h, n)$ を特定化し，前節 (1) 式の消費者の効用最大化問題に最適解が存在することを証明する．

適当な仮定の下で，生産関数の特徴として偏微分不可能な点の存在が言える．これは女性が市場財の生産に参加する時点と男性が家事サービスに参加する時点で生産関数の変化が激しいので，それらの点で生じる現象である．以下においてこれらについて述べる．

次の仮定をおく．

仮定 1．$\dfrac{A_{cm}}{A_{xm}}>\dfrac{A_{cf}}{A_{xf}}$ と仮定する．

仮定 2．$h=h_m+h_f$ とおく．$\underline{h}$ をある与えられた正の定数とし，h は $h\geq 2\underline{h}$ の範囲を動くことができる．$\overline{h_m}$ を $\overline{h_m}>\underline{h}$ なるある定数とし，$h\leq\overline{h_m}+\underline{h}$ のとき，$h_m=h-\underline{h}$ であり，$h>\overline{h_m}+\underline{h}$ のとき，$h_m=\overline{h_m}$ であると仮定する[1]．

仮定 3．$0\leq\beta(n)<1$，$\beta(0)=0$，$\beta'(n)>0$，$\beta''(n)<0$ と仮定する．さらに，$\beta(n)$ の n に対するの弾力性が 1 より小さい，即ち $\dfrac{n\beta'(n)}{\beta(n)}\leq 1$ であると仮定する．なお，$\lim_{n\to 0}\dfrac{n}{\beta(n)}=0$ も仮定する．

以上の仮定の下で，以下のような結果が得られる．

命題 1．仮定 1 の下で，生産関数は

$$F(h, n)=\begin{cases}[\theta_m A_{cm}h_m T]^{\gamma}[(1-\theta_m)A_{xm}T+A_{xf}(T-nt_0)]^{1-\gamma}: n>n_0^1\\ [A_{cm}h_m T]^{\gamma}[A_{xf}(T-nt_0)]^{1-\gamma}: n_0^2(h)\leq n\leq n_0^1\\ [A_{cm}h_m T+\theta_f A_{cf}h_f(T-nt_0)]^{\gamma}[(1-\theta_f)A_{xf}(T-nt_0)]^{1-\gamma}: n<n_0^2(h)\end{cases}$$

1）金谷貞男（2000）は $h\leq\overline{h_m}+\underline{h}$ のとき，$h_m=h-\underline{h}$ であり，$h>\overline{h_m}+\underline{h}$ のとき，$h_m=\overline{h_m}$ であることを示した．引用しやすいため，ここでその結果を仮定としておく．

となる．ここで，$\theta_m<1$，$\theta_f>0$，$n_0^1\equiv\frac{T}{t_0}[1-\frac{(1-\gamma)A_{xm}}{\gamma A_{xf}}]$，$n_0^2(h)\equiv\frac{T}{t_0}[1-\frac{(1-\gamma)A_{cm}h_m}{\gamma A_{cf}h_f}]$ である．また，$F(h, n)$ は h と n の連続関数である．

証明：付論を参照．

この命題から，次のようなことが言える．仮定 1 から，$n_0^1>n_0^2(h)$ ということが分かる．直感的に解釈すれば，仮定 1 から，男性が市場財の生産に比較優位なので，θ_m と θ_f が同時に正となることはなく，そして $\theta_m=0$ かつ $\theta_f>0$ ということもあり得ない．従って $\theta_m=1$ かつ $\theta_f\geq 0$ というケースと $\theta_m<1$ かつ $\theta_f=0$ というケースしかない．子供の数が $n_0^2(h)$ より小さいとき，女性は市場財の生産に参加する．つまり，男性は完全特化，女性は不完全特化になる．子供の数が n_0^1 より大きいとき，女性は家事に完全特化，男性は不完全特化である．もし，子供の数が両者の間にあるならば，男・女ともに完全特化になる．

命題 2．仮定 2 の下で，次のことが成立する．

(i) 点 $h=\overline{h_m}+\underline{h}$ で偏微分 F_h は存在しないし，θ_f の値が 0 から正に変わるとき，あるいは θ_m は 1 から，1 より小さい数字に変わるとき F_{hn}，F_{nn} 及び F_{hh} は存在しない．

(ii) ほかの点で $F_h>0$，$F_n<0$，$F_{hh}\leq 0$，$F_{hn}\leq 0$，$F_{nn}\leq 0$，$F_{hh}\geq 0(h>\overline{h_m}+\underline{h}$，$\theta_f>0)$になる．

(iii) 計算しやすいため，$A_{cm}=A_{cf}$ と仮定する．区間 $\left[\frac{\underline{h}}{1-\gamma}, \overline{h_m}+\underline{h}\right)$ と $\left(\overline{h_m}+\underline{h}, \frac{\overline{h_m}}{\gamma}\right]$ で F は 2 階偏微分可能である．

証明：(i)及び(ii)の証明は付論を参照．(iii)を証明する．$\overline{h_m}+\underline{h}>h\geq\frac{\underline{h}}{1-\gamma}$ のとき，仮定 2 から，$h_m\geq\frac{\underline{h}}{1-\gamma}-\underline{h}=\frac{\gamma\underline{h}}{1-\gamma}$，$h_f=\underline{h}$ になる．命題 1 から，$n_0^2(h)\leq 0$ ということが分かる．同じく，$\overline{h_m}+\underline{h}<h\leq\frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ のとき，仮定 2 から $h_m=\overline{h_m}$，$h_f\leq\frac{\overline{h_m}}{\gamma}-\overline{h_m}$ を得る．従って $n_0^2(h)\leq 0$ が分かる．最適出生率 $n\geq 0$ から，$n\geq n_0^2(h)$ になる．命題 1 から，h がそれらの区間に属するとき，$\theta_m=1$，$\theta_f=0$ になる．命題 2 の前半部分で，F の 2 階偏微分が存在する． (QED)

次に，問題 (1) の最適解が存在することを証明する．まず，問題 (1) の代わりに，それと同じ解を持つ次の最適化問題を考える．

$$V(h)=\max_{(h_1,n)\in\Gamma(h)} u[F(h, n)-nh_1]+\beta(n)V(h_1) \tag{2}$$

ついて，h が与えられたとき次の式により，4 つの集合$\Gamma(h)$, $G(h)$, $H(h)$ と $N(h)$ を定義する．

$$\Gamma(h)\equiv\left\{(h_1,\ n):nh_1\leq F(h,\ n);\ \underline{h}\leq h\leq\overline{h_m}+\overline{h_f};\ 0\leq n\leq\frac{T}{t_0}\right\}$$

$$G(h)\equiv\{(h_1,\ n):u[F(h,\ n)-nh_1]+\beta(n)V(h_1)\geq u[F(h,\ n')-n'h_1']$$
$$+\beta(n')V(h'_1),\ (h'_1,\ n')\in\Gamma(h)\}$$

$$H(h)\equiv\{h_1:(h_1,\ n)\in G(h)\}$$

$$N(h)\equiv\{n:(h_1,\ n)\in G(h)\}.$$

このとき，次の定理が成立する．

定理１[2]．仮定２の下で，問題 (2) の解である有界連続な関数 V が存在する．この V に対して定まる対応 $G(h)$ と $H(h)$ は h について上方半連続である．

証明：A）対応 $\Gamma(h)$ が連続であることを証明する．

まず，$\Gamma(h)$ が上方半連続であることを証明する．集合 $\Gamma(h)$ が空集合でないこととコンパクトであることは明らかである．任意の列 $h^\nu\to h$ と任意の点列 $(h_1^\nu,\ n^\nu)\subset\Gamma(h^\nu)$ に対して，$\{h^\nu\}$ と $\{n^\nu\}$ が有界数列なので，各々収束部分列が存在する．共通の収束部分列を選んで，$(h^{1\nu},\ n^{1\nu})\to(h_1,\ n)$ になる．生産関数 $F(h,\ n)$ の連続性から，$(h_1,\ n)\in\Gamma(h)$ ということが分かる．

次に，$\Gamma(h)$ が下方半連続であることを証明する．任意の列 $h^\nu\to h$ と任意の $(h_1,\ n)\in\Gamma(h)$ に対して，十分大きい $\boldsymbol{v}$ に対して，集合 $\Gamma(h^\nu)$ の中で点 $(h_1,\ n)$ に収束する点列 $(h_1^\nu,\ n^\nu)$ は存在することを証明しよう．

まず，$nh_1<F(h,\ n)$ と仮定する．関数 F の連続性により，十分大きい $\boldsymbol{v}$ に対して，$nh_1<F(h^\nu,\ n)$ が成立する．それで $(h_1^\nu,\ n^\nu)\equiv(h_1,\ n)$ と置けばよい．

次に，$nh_1=F(h,\ n)$ と仮定する．もし，$h_1>2\underline{h}$ とすれば，十分大きい $\boldsymbol{v}$ に対して $h_1^\nu=\dfrac{F(h^\nu,\ n)}{n}>2\underline{h}$ となる．$(h_1^\nu,\ n^\nu)=\left(\dfrac{F(h^\nu,\ n)}{n},\ n\right)$ とすればよい．もし，$h_1=\dfrac{F(h,\ n)}{n}=2\underline{h}$ とすれば，十分大きい $\boldsymbol{v}$ に対して，$n^\nu=n-\dfrac{1}{\boldsymbol{v}}$ とおく．$F_n<0$ から，$\left(n-\dfrac{1}{\boldsymbol{v}}\right)h_1<F\left(h,\ n-\dfrac{1}{\boldsymbol{v}}\right)$ になる．前のケースから，$\left(h_1,\ n-\dfrac{1}{\boldsymbol{v}}\right)\in\Gamma(h^\nu)$ になる．したがって $(h_1^\nu,\ n^\nu)=\left(h_1,\ n-\dfrac{1}{\boldsymbol{v}}\right)$ とおけばよい．

B）写像 $Tf(h)=\max\limits_{(h_1,n)\in\Gamma(h)}u[F(h,\ n)-nh_1]+\beta(n)f(h_1)$ を定義する．以下で写像 T が $B(X)$ から，$B(X)$ への縮小写像であることを証明する，ここで $X\equiv[2\underline{h},\ \overline{h_m}+\overline{h_f}]$，$B(X)$ は X 上の連続関数からなっている距離空間である．任意の $f\in B(X)$ に対して，$Tf\in B(X)$ が明らかである．T が縮小写像であることを証明するために，Blackwell 定理を使う．つまり，$T(f+a)\leq Tf+\delta a$，$(\delta<1)$ と $f\leq g$ に対して，$Tf\leq Tg$ が満たされることを示せばよい．最初の条件が満たされることを証明するために $\delta=\beta\left(\dfrac{T}{t_0}\right)$ とおけばよい．次に，$f,g\in B(X)$，$f\leq g$ とする．任

2）Stokry and Lucas（1989）の方法を用いて証明したものである．参考文献の［７］を参照．

意の $(h_1, n) \in \Gamma(h)$ に対して

$$u[F(h, n) - nh_1] + \beta(n) f(h_1) \leq u[F(h, n) - nh_1] + \beta(n) g(h_1)$$

が満たされるので，$Tf \leq Tg$ になる．Blackwell 定理によって，T が縮小写像である．最大値定理により，(2) を満たす連続関数 V が存在し，対応 $G(h)$ が上方半連続である．従って，対応 $H(h)$ と $N(h)$ も上方半連続である． QED

3．　最適経路の単調性と収束

前節の定理 1 で，問題 (2) の最適経路が存在することが証明された．問題 (1) と問題 (2) が同じ解を持つので，これで問題 (1) の最適経路の存在が証明されたことになる．

本節で，問題 (2) の最適経路の特徴づけを行う．そのために，価値関数 $V(h)$ の微分可能性や，最適経路の一意性を証明する必要がある．仮定 4 の下で，最適出生率 n は $0 < n < n_0^1$ の範囲で動くことになる．仮定 5 の下で，人的資本の初期値はある数字 h_0 を超えると，来期の人的資本の最適解は内部点である．下で述べる定理 2 では効用関数 u に関する適当な条件の下で，問題 (2) の解が一意的であることを示す．定理 3 では関数 β に関するある条件の下でその内部人的資本の最適経路が単調増加経路であることを証明する．定理 4 では増加する人的資本最適経路を持つ最適経路 $\{(h_t, n_t)\}$ は定常解に収束することを示す．

1．最適解が内部解である条件について

仮定 4． $u'[F(\overline{h_m} + \underline{h}, n_0^1)] F_n(2\underline{h}, n_0^1) + \beta'(n_0^1) V\left(\dfrac{F(\overline{h_m} + \underline{h}, n_0^1)}{n_0^1}\right) < 0.$

明らかに $n > 0$．以上の条件は最適出生率 $n < n_0^1$ ということを保証する．（付録を参照）

次に最適人的資本が内部解であることを保証する条件を課する．

仮定 5． $F_h(2\underline{h}, n_0^1) > \dfrac{n_0^1}{\beta(n_0^1)}$ と仮定する．

仮定 5 の下で，ある人的資本の値が存在し，人的資本の初期値はその値以下となると，次期以降の人的資本が $2\underline{h}$ に止まり，初期値はその値以上となると，次期の人的資本が内部点である．証明は付録におく．

以下の議論では，仮定 4-5 が満たされるとする．

仮定 6． $U(h, n, h_1) \equiv u[F(h, n) - nh_1]$ と定義する．$U(h, n, h_1)$ は (n, h_1) に関する強い意味での凹関数である．

仮定 7． $\dfrac{n\beta''(n)}{\beta'(n)} < -\dfrac{[F_h - nF_{hn}]^2}{nF_n F_{hh}}$，$(F_{hh} < 0)$ と仮定する．

定理 2．生産関数 F が 2 階偏微分可能である区間で仮定 6-7 の下で問題 (2) の解は一意的であ

る．その上に価値関数 $V(h)$ は凹で $V(h)$ が微分可能である．
定理 2 の証明は参考文献の [6]を参照．

2．最適人的資本の経路は単調増加経路について

$\beta(n)/\beta'(n)$ の弾力性に関するある条件の下で，最適人的資本経路は単調増加経路であることは Benhabib and Nishimura[4]の方針に従って以下のように証明できる．
仮定 8．$\beta(n)/\beta'(n)$ の弾力性 $e>1$ と仮定する．
定理 3．定理 2 の仮定に仮定 8 を追加すると，$H(h)$ は増加関数である．
証明　定理 2 から，問題 (2) の解が唯一に存在することと価値関数が微分可能であることが分かる．次の一階条件

$$u'[F(h,n)-nh_1][F_n(h,n)-h_1]+\beta'(n)V(h_1)=0 \tag{4}$$

$$-nu'[F(h,n)-nh_1]+\beta(n)V'(h_1)=0 \tag{5}$$

が成立する．式(4) から，連続偏微分可能な関数 $n=n(h, h_1)$ を得る．

$$w(h, h_1, n)\equiv U(h, h_1, n)+\beta(n)V(h_1) \text{ と}$$

$$\overline{w}(h, h_1)\equiv w(h, h_1, n(h, h_1))$$

を定義しておく．次に F の 2 階偏微分可能な点で $\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial h\partial h_1}>0$ ということを証明しよう．

$$\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial h\partial h_1}=\frac{\partial^2 w}{\partial h\partial h_1}+\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial h_1}\frac{\partial n}{\partial h}$$

ここで，$\frac{\partial^2 w}{\partial h\partial h_1}=-nu''F_h$，$\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial h_1}=-u'-nu''(F_n-h_1)+\beta'(n)V'(h_1)$．式(4) から，

$$\frac{\partial n}{\partial h}=-\frac{\partial^2 w/\partial h\partial n}{\partial^2 w/\partial n^2}=\frac{-u'F_{nh}-u''(F_n-h_1)F_h}{u''(F_n-h_1)^2+u'F_{nn}+\beta''(n)V(h_1)}$$

を得る．そこで，

$$\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial h\partial h_1}=\frac{1}{D}(M_1+M_2)$$

を得る．ここで

$$D=u''(F_n-h_1)^2+u'F_{nn}+\beta''(n)V(h_1)$$

$$M_1=u'u''(F_n-h_1)F_h\left[1-\frac{n\beta''(n)V(h_1)}{u'(F_n-h_1)}-\frac{\beta'(n)V'(h_1)}{u'}\right]$$

$$M_2=u'F_{nh}[u'+u''n(F_n-h_1)-\beta'(n)V'(h_1)]-nu''u'F_{nn}F_h$$

である．まず，M_1 の符号を考える．式(4) と (5) から，

$$
\begin{aligned}
M_1 &= u'u''(F_n-h_1)F_h\left[1-\frac{n\beta''(n)V(h_1)}{u'(F_n-h_1)}-\frac{\beta'(n)V'(h_1)}{u'}\right]\\
&= u'u''(F_n-h_1)F_h\left[1+\frac{n\beta''(n)}{\beta'(n)}-\frac{n\beta'(n)}{\beta(n)}\right]\\
&= u'u''(F_n-h_1)F_h\left\{1-\frac{n\beta'(n)}{\beta(n)}\left[\frac{\beta'^2(n)-\beta''(n)\beta(n)}{\beta'^2(n)}\right]\right\}\\
&= u'u''(F_n-h_1)F_h(1-e)
\end{aligned}
$$

を得る．$e>1$ とすると，$M_1<0$ になる．

次に M_2 の符号を考える．

$$
\begin{aligned}
&u'F_{nh}[u'+u''n(F_n-h_1)-\beta'(n)V'(h_1)]\\
&=u'F_{nh}\left[u''n(F_n-h_1)+u'\left\{1-\frac{\beta'(n)V'(h_1)}{u'}\right\}\right]\\
&=u'F_{nh}\left[u''n(F_n-h_1)+u'\left\{1-\frac{n\beta'(n)}{\beta(n)}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

仮定5の下で，上の式が負である．$u''<0,\ F_{nn}<0$ から，$M_2<0$ が分かる．明らかに分母が負なので，最適経路で $\dfrac{\partial^2\overline{w}}{\partial h\partial h_1}>0$ となる．

従って，最適経路で，もし $h<h'$，$h_1>h_1'$ とすれば，

$$\overline{w}(h',h_1)-\overline{w}(h',h_1')>\overline{w}(h,h_1)-\overline{w}(h,h_1') \tag{6}$$

になる．一方，最適解であることから，

$$\overline{w}(h,h_1)\geq\overline{w}(h,h_1'),\ \ \overline{w}(h',h_1')\geq\overline{w}(h',h_1)$$

を得る．二つの不等式から，

$$\overline{w}(h,h_1)-\overline{w}(h,h_1')\geq\overline{w}(h',h_1)-\overline{w}(h',h_1').$$

それは式(6) と矛盾する．従って $h<h$ とすれば，$h_1\leq h'_1$ になる．　(QED)

系１．$A_{cm}=A_{cf}$ という仮定の下で，$\gamma<\dfrac{1}{2}$ そして $H(\overline{h_m}+\underline{h})\leq\overline{h_m}+\underline{h}$ のとき，$h\in(2\underline{h},\ \overline{h_m}+\underline{h})$ に対して，政策関数 $H(h)$ が増加関数である．

証明：命題１の $n_0^2(h)$ を調べる．$n_0^2(2\underline{h})=\dfrac{T}{t_0}\left\{\dfrac{2\gamma-1}{\gamma}\right\}<0$ と $n_0^2(h)\leq n_0^2(2\underline{h})<0$ から，$h\in(2\underline{h},\ \overline{h_m}+\underline{h})$ に対して命題１より，$\theta_f=0$ になる．命題２より，生産関数が２階偏微分可能である．定理３から，政策関数が増加であることが分かる．　(QED)

３．横断性条件について

以下で人的資本の内部経路が単調増加で，しかも定常解に収束することを証明する．それはオイラー方程式から横断性条件を得，人的資本経路の単調性を利用して証明するものである．

最適解$(h_t,\ n_{t-1})\in int\ G(h_{t-1})$ と仮定する．オイラー方程式から

$$-n_t u'(z_t)+\beta(n_t)u'(z_{t+1})F_h(h_t,\ n_{t+1})=0,\ t=1,\cdots$$

それらの方程式の和を取ると，

$$\sum_{t=1}^{\infty} u'(z_{t+1})[\beta(n_t)F_h(h_t,\ n_{t+1})-n_{t+1}]=n_1 u'(z_1) \tag{7}$$

を得る．

命題３．式(7) が成立するには１）$\beta(n_t)F_h(h_t,\ n_{t+1})-n_{t+1}$ の符号が無限回に変わるのか，２）$\beta(n_t)F_h(h_t,\ n_{t+1})-n_{t+1}\to 0$ になるのかのどちらかである．

証明　もし，$\beta(n_t)F_h(h_t,\ n_{t+1})-n_{t+1}$ の符号が無限回に変わることはないと仮定する．そうすると，t が十分大きくなると，$\beta(n_t)F_h(h_t,\ n_{t+1})-n_{t+1}$ は常に負なのかそれとも正である．$\beta(n_t)F_h(h_t,\ n_{t+1})-n_{t+1}>0$ と仮定する．(7) の左辺の和の各項が正になる．z_t が有界なので，$u'(z_t)\to 0$ が成り立たない．級数収束の必要条件から，$\beta(n_t)F_h(h_t,\ n_{t+1})-n_{t+1}\to 0$ が成立しなければならない．　(QED)

系１．もし，$(h_{t+1},\ n_t)\in G(h_t)$，$h_t>2\underline{h}$，$h_t\to 2\underline{h}$ が存在すれば，$0\in N(2\underline{h})$，そして $n_t\to 0$ になる．

証明　条件４の下で，n_t が内部解であることが分かる．(4)式が満たされる．(4) から，連続微分可能な関数 $n_t=n(h_t,\ h_{t+1})$ を得る．$h_t\to 2\underline{h}$ から，$n_t\to n_0$ が分かる．ここで $n_0=n(2\underline{h},\ 2\underline{h})\in N(2\underline{h})$．$F_h(2\underline{h},\ n_0^1)-\dfrac{n_0^1}{\beta(n_0^1)}=\delta$ とおく．仮定５より，$\delta>0$．次に，$n_t,\ n_{t+1}<n_0^1$，$n_t\in G(h_t)$ に対して，$F_h(2\underline{h},\ n_{t+1})-\dfrac{n_{t+1}}{\beta(n_t)}>\delta$ を示す．

まず，$\dfrac{d}{dn}\left(\dfrac{n}{\beta(n)}\right)=\dfrac{1}{\beta(n)}\left\{1-\dfrac{n\beta'(n)}{\beta(n)}\right\}>0$ から $\dfrac{n}{\beta(n)}$ が n の増加関数であることが分かる．従って $F_h(2\underline{h},\ n_0)-\dfrac{n_0}{\beta(n_0)}>\delta$．関数 $F_h,\ \dfrac{n}{\beta(n)}$ の連続性から，$F_h(h_t,\ n_{t+1})-\dfrac{n_{t+1}}{\beta(n_t)}>\dfrac{\delta}{2}$ が十分大きい t に対して成り立つ．効用関数の $u'(z)\to\infty(z\to 0)$ という仮定から，$u'(z_t)$ が十分大きい．$u'(z_t)>a$ と仮定する．従って，

$$\sum_{t=m}^{\infty} u'(z_{t+1})[\beta(n_t)F_h(h_t,\ n_{t+1})-n_{t+1}]>\frac{a\delta}{2}\sum_{t=m}^{\infty}\beta(n_t).$$

左辺の級数が収束するので，右辺の級数も収束する．従って $\beta(n_t)\to 0$，それで $n_0=0$ を得る．

(QED)

系２．$F(2\underline{h},\ 0)>>0$ と，$\beta'(n)\to\infty(n\to 0)$ と仮定すると，$0\notin N(2\underline{h})$．従って，もし $h_1<h$ とすれば，t が存在し，$h_t=2\underline{h}$．

証明：$n\to 0$ のとき，$\beta'(n)\to\infty$ から，$u'[F(\overline{h_m}+\underline{h},\ \varepsilon)-2\varepsilon\underline{h}](F_n-2\underline{h})+\beta'(\varepsilon)V(2\underline{h})>0$ になれるので，$n=0$ が最適解ではない．系１から，$h_t\neq 2\underline{h}$ しかも $h_t\to 2\underline{h}$ のような無限列 $\{h_1\}$ は存在しない．従って，減少経路は有限期間で，$2\underline{h}$ に達する．　(QED)

系３．定理３の系１の条件を満たされると仮定する．区間 $[h_0,\ \overline{h_m}+\underline{h})$ に増加する人的資本の最

適経路が存在する．ここで，h_0 は次に性質を持つ臨界点である．つまり，$h \geq h_0$ に対して $H(h) > 2\underline{h}$ になる．（h_0 の存在は附論を参照）
証明：もし，増加経路が存在しなければ，定理 3 から，任意の初期値 h から出発する内部の最適経路では $H(h) < h$ を満たす．つまり $h_1 \leq h$ になる．定理 3 から，$h_{t+1} \leq h_t$ になる．人的資本の最適経路は減少経路になる．系 2 より，有限期間で $h_t \equiv 2\underline{h}$ になる．

関数 $\xi(h) \equiv \max_n \left\{ \dfrac{u[F(h, n) - nh]}{1 - \beta(n)} \right\}$ を定義する．$\overline{h_m} + \underline{h}$ が $2\underline{h}$ より十分大きいとき，$\xi(\overline{h_m} + \underline{h}) >> \xi(2\underline{h})$. 従って $\overline{h_m} + \underline{h}$ に十分近い h に対して，次期以降の人的資本を $\overline{h_m} + \underline{h}$ にした方は効用が高い．それは最適経路が減少であると矛盾する．（QED）
定理 4．人的資本の内部単調増加最適経路 $\{h_t\}$ を持つ最適経路 $\{(h_t, n_t)\}$ は定常解 (h^*, n^*) に収束する．定常解は

$$F_h(h^*, n^*) - \frac{n^*}{\beta(n^*)} = 0 \tag{8}$$

を満たす．

証明：1）$2\underline{h} \leq h_t \leq \overline{h_m} + \overline{h_f}$ ので，$\{h_t\}$ の極限が存在する．$h_t \to h^*$ と仮定する．式(4) から，連続偏微分可能な関数 $n_t = n(h_t, h_{t+1})$ を得るので，人的資本 $h_t \to h^*$ から，出生率の値 $n_t \to n^*(h^*, h^*) \equiv n^*$ が分かる．

2）(h^*, n^*) が定常解である．

$(h_{t+1}, n_t) \in G(h_t)$ なので，$G(h)$ の上方半連続性から，$(h^*, n^*) \in G(h^*)$ が分かる．オイラー方程式 $-n_t u'(z_t) + \beta(n_t) u'(z_{t+1}) F_h(h_{t+1}, n_{t+1}) = 0$ から極限を取ると式(8) を得る．（QED）

4．定常解の位置と最適解の挙動

この節では定常解が幾つ存在するか，最適経路がどのように動いて定常解に収束するか，定常解がどんな性質を持つかといった問題を検討する．

1．下方定常解に関して

まず，定常解の位置について見る．
命題 4．市場財の生産性 γ が十分小さいとき，区間 $[h_0, \overline{h_m} + \underline{h}]$ 内に定常解が存在する．その定常解では男性と女性は共に完全特化の状態である．
証明：命題 2 から，$\dfrac{\underline{h}}{1-\gamma} \leq h \leq \dfrac{\overline{h_m}}{\gamma}$ のとき，女性が市場財の生産に参加しないので，$\overline{h_m} + \underline{h} \leq h \leq \dfrac{\overline{h_m}}{\gamma}$ のときに，任意の n に対して $F(h, n) = F(\overline{h_m} + \underline{h}, n)$ になる．従って $V(h) = V(\overline{h_m} + \underline{h})$

になる．もし，$h_1 \leq \frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ とすれば，任意の n に対して

$$u[F(\overline{h_m}+\underline{h},\, n)-nh_1]+\beta(n)V(h_1)=u[F(\overline{h_m}+\underline{h},\, n)-nh_1]+\beta(n)V(\overline{h_m}+\underline{h})<$$
$$u[F(\overline{h_m}+\underline{h},\, n)-n(\overline{h_m}+\underline{h})]+\beta(n)V(\overline{h_m}+\underline{h})$$

が成り立つので，$h_1 \leq \overline{h_m}+\underline{h}$ になる．

$\frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ が十分大きい場合に仮に $h_1 > \frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ とする．そのとき，$F(\overline{h_m}+\underline{h},\, n)-nh_1 \geq 0$ を保つために n を小さく取るか，それとも $z=F(\overline{h_m}+\underline{h},\, n)-nh_1$ を小さくするかのどちらかである．$F_n-h_1<0$ から，z は n の減少関数であることが分かる．最適解は (5) を満たすので，$-nu'[F(h,\, n)-nh_1]+\beta(n)V'(h_1)=0$ から，$n \to 0$ のとき，$\frac{\beta(n)}{n}V'(h_1) \to \infty$ ので，$u'(z) \to \infty$ も成り立つ．つまり，n が小さくなると，z も小さくならなければならない．これは z が n の減少関数であることに矛盾する．その矛盾から，$\frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ が大きいとき，$h_1 > \frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ が取れない．

従って，$h \in [h_0,\, \overline{h_m}+\underline{h}]$ のとき，$h_1 \leq \overline{h_m}+\underline{h}$ になる．命題 3 の系 3 から，人的資本の増加する最適経路 $\{h_t\}$ が存在する．$h_t \leq \overline{h_m}+\underline{h}$ なので，$\{h_t\}$ が h^* に収束する．定理 4 から，出生率の最適経路は n^* に収束する．そして，$(h^*,\, n^*)$ で方程式(8) が満たされる．　(QED)

$\overline{h_m}$ が小さい，それとも γ が大きい場合には，$\overline{h_m}+\underline{h}$ の左側の近傍にある初期値から出発する最適経路に沿って n を十分小さくとれば，$\frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ 以上の人的資本を生産できるかもしれない．その場合，下方定常解は存在しなくなる．のちに見るように人的資本の最適経路は上方定常解に収束していく．

2．上方定常解について

次にもう一つのより大きい定常解の存在を証明する．証明の方針は，ある値以上の人的資本の初期値から出発する経路に沿って女性が市場財の生産に参加することを示すことによって人的資本が増加していき，次の定常解に収束することを示す．その経路に沿って，女性が市場財の生産を手伝うので，その定常点でも女性が市場財の生産に携わることになる．

命題 5．$\overline{h_m}+h_f >> \frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ と仮定すると，$(\overline{h_m}+\underline{h},\, \overline{h_m}+\overline{h_f}]$ の間に定常解が存在する．その定常解では，男性は市場財の生産に完全特化で，女性は不完全特化である．

証明：命題 4 の証明より，人的資本の初期値 $h \leq \frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ から出発すると次期の人的資本の最適値が $\overline{h_m}+\underline{h}$ であることが分かる．命題 3 の系 3 と同じ，$\overline{h_m}+\overline{h_f} >> \frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ という仮定から，必ず

$h > \dfrac{\overline{h_m}}{\gamma}$ が存在し，$h_1 > \dfrac{\overline{h_m}}{\gamma}$ が満たされる．ここで $h_1 \in H(h)$．そして $h_1 > \dfrac{\overline{h_m}}{\gamma}$ から，$n(h, h_1) < n_0^2(h)$ が分かる．というのは，もし，$n(h, h_1) > n_0^2(h)$ とすれば，命題 1 より $\theta_f = 0$ になる．女性が市場財の生産に参加しないから，$F(h, n) = F(\overline{h_m} + \underline{h}, n)$ になるので，$h_1 \leq \overline{h_m} + \underline{h}$ となるからである．

$h^0 \equiv \min_h \{n < n_0^2(h), n \in N(h)\}$ とおく．次に，$h > h^0$ に対して，h に対する最適出生率 n は $n < n_0^2(h)$ を満たすことを示そう．

もし逆に，ある点 $h > h^0$ で，$n \in N(h)$ に対して，$n > n_0^2(h)$ とすると，命題 1 から $\theta_f = 0$ となり，生産関数は $F(h, n) = F(\overline{h_m} + \underline{h}, n)$ である．そのため，次期の人的資本の最適値は $\overline{h_m} + \underline{h}$ である．つまり，

$$u[F(h, n) - n(\overline{h_m} + \underline{h})] + \beta(n) V(\overline{h_m} + \underline{h}) \leq V(\overline{h_m} + \underline{h}).$$

しかし，

$$\begin{aligned}
&V(h^0) = u[F(h^0, n(h^0)) - n(h^0) h_1^0] + \beta(n(h^0)) V(h_1^0) > V(\overline{h_m} + \underline{h}) \text{ から，} \\
&u[F(h, n(h^0)) - n(h^0) h_1^0] + \beta(n(h^0)) V(h_1^0) \geq \\
&u[F(h^0, n(h^0)) - n(h^0) h_1^0] + \beta(n(h^0)) V(h_1^0) > V(\overline{h_m} + \underline{h})
\end{aligned}$$

を得る，ここで $(h_1^0, n(h^0)) \in G(h^0) \subset \Gamma(h)$．従って $n \geq n_0^2(h)$ は最適出生率ではない．即ち，$h \geq h^0$ とすると最適出生率は $n(h) < n_0^2(h)$ そして $\theta_f > 0$ となる．従って，F は h，n について偏導関数と 2 階偏導関数が存在する．

さらに同じ証明の方法で，$h \geq h^0$ とすると $H(h) \geq h^0$ ということを証明できる．
背理法でそれを証明する．もし，$h_1 < h^0$, $(h_1 \in H(h))$ が成立するような $h \geq h^0$ が存在すると仮定する．h^0 の定義から，$n' \in N(h_1)$ が存在し，$n' > n_0^2(h_1)$ になる．命題 1 から，$F(h_1, n') = F(\overline{h_m} + \underline{h}, n')$ そして $V(h_1) = V(\overline{h_m} + \underline{h})$ になる．そこで

$$\begin{aligned}
u[F(h, n) - nh_1] + \beta(n) V(h_1) &= u[F(h, n) - nh_1] + \beta(n) V(\overline{h_m} + \underline{h}) \\
&< u[F(h, n) - n(\overline{h_m} + \underline{h})] + \beta(n) V(\overline{h_m} + \underline{h})
\end{aligned}$$

になる．ここで $(h_1, n) \in G(h)$．これは $(h_1, n) \in G(h)$ に矛盾する．従って任意の $h \geq h^0$ に対して，$H(h) \geq h^0$ が満たされる．

従って，H が $[h^0, \overline{h_m} + \overline{h_f}]$ から $[h^0, \overline{h_m} + \overline{h_f}]$ への上方半連続対応である．不動点定理から，$h^{**} \in [h_0, \overline{h_m} + \overline{h_f}]$ が存在し，$h^{**} \in H(h^{**})$ になる．　(QED)

注意：もし，区間 $(\overline{h_m} + \underline{h}, \overline{h_m} + \overline{h_f})$ 中の点で $F_h(h, n(h)) - \dfrac{n(h)}{\beta(n(h))} = 0$ を満たさなければ，上方定常解は $\overline{h_m} + \overline{h_f}$ である．

市場財の生産性 γ が十分小さい場合，$\overline{h_m} + \overline{h_f} \leq \dfrac{\overline{h_m}}{\gamma}$ である可能性もある．

その場合，上方定常解が存在しなくなる．一番大きい定常解 $\overline{h_m} + \underline{h}$ で女性は教育を受けられな

いことになる．

3．定常解の区間内一意性について

関数 $\xi(h)\equiv\max_n \dfrac{u[F(h,n)-nh]}{1-\beta(n)}$ を考える．一階条件

$$\frac{u'(z)[F_n(h,n)-h][1-\beta(n)]+\beta'(n)u(z)}{[1-\beta(n)]^2}=0 \tag{9}$$

が満たされる．方程式(9) の左辺の分子の n についての 2 階微分が負なので，(9) を満たす n が一意的である．

定常解は

$$[1-\beta(n)]u'(z)[F_n(h,n)-h]+\beta'(n)u(z)=0 \tag{10}$$

と

$$\beta(n)F_h(h,n)-n=0 \tag{8}$$

を満たす，ここで $z=F(h,n)-nh$．式(10) から，

$$\frac{dn}{dh}=-\frac{[1-\beta(n)]u''(z)(F_n-h)(F_h-n)+u'(z)\{\beta'(n)(F_h-n)+[1-\beta(n)](F_{nh}-1)\}}{[1-\beta(n)]\{u''(z)(F_n-h)^2+u'(z)F_{nn}\}+\beta''(n)u(z)}$$

を得る．

分子の第 2 項を考える．

$$u'(z)\{\beta'(n)(F_h-n)+[1-\beta(n)](F_{nh}-1)\}=\frac{u'(z)}{n}(F_h-n)[1-\beta(n)]\left\{\frac{n\beta'(n)}{1-\beta(n)}+\frac{n[F_{nh}-1]}{F_h-n}\right\}$$

から，$\dfrac{n\beta'(n)}{1-\beta(n)}+\dfrac{n[F_{nh}-1]}{F_h-n}\geq 0$ のとき，第 2 項が正になる．つまり，分子が正になる．分母が負なので，$\dfrac{dn}{dh}>0$ になる．

F_h が $[h_0,\overline{h_m}+\underline{h}]$で h についての減少関数で，そして，n についての減少関数なので，$F_h(h,n(h))-\dfrac{n(h)}{\beta(n(h))}$ は h の減少関数である．

命題 6．もし，$1-\beta(n)$ の弾力性は F_h-n の n に関する弾力性よりも大きいとき，区間 $[h_0,\overline{h_m}+\underline{h}]$ で定常解 1 つが存在する．

4．上の結果から分かること

以下では，本節の命題 4-6 の結果について，経済的な解釈をまとめ，また，最適経路の動きについて推測も行う．

まず，命題 4 の結果から，最適経路の動き方を分析する．最終財の市場財に対する生産性 γ が

条件 $\gamma<\frac{1}{2}$ を満たしているとき，女性は市場財の生産に参加しない（定理３の系１）．最適経路に沿って，男•女ともに完全特化である．そして，生産性が低いため人的資本 $\overline{h_m}+\underline{h}$ により $\frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ 以上の人的資本を生産できないとき，区間 $(2\underline{h}, \overline{h_m}+\underline{h}]$ に定常解が存在する．その定常解では，男・女ともに完全特化である．

一方，もし最終財の市場財に対する生産性 γ が大きければ，$h=2\underline{h}$ で女性が市場財の生産に参加する可能性がある．人的資本のある値に達してから男•女共に完全特化の状態になる．h が $\overline{h_m}+\underline{h}$ より小さいとき最適出生率が減少し，h が $\overline{h_m}+\underline{h}$ の近くに来るまで最適出生率 n が減少する．そして $\frac{\overline{h_m}}{\gamma}$ 以上の人的資本が生産されると，人的資本の経路は $\overline{h_m}+\underline{h}$ を一気に越えて，増加しながら次の上の定常解に収束していく可能性がある．（推測）

次に，命題５の結果にもとづいて，最適経路の動き方や，特に最適出生率の変化について，分析を行う．初期値 h が値 $\overline{h_m}+\underline{h}$ より大きくしかも $\overline{h_m}+\underline{h}$ に十分近いとすると次期人的資本の最適値は $\overline{h_m}+\underline{h}$ である．しかし，出生率は減少しつつある．最後に出生率が女性の市場財の生産に携わることのできる水準まで減少したら，人的資本は次の定常解まで増加しながら収束して行く．定常解 (h^{**}, n^{**}) で，男性は完全特化で，女性は不完全特化である．最適経路に沿って最適出生率は減少していく可能性もあるし，ある数字を越えないように増加していく可能性もある．

定常解が幾つ存在するかという問題に関して，命題６は部分的な解答を与えている．命題６は，ある条件の下で，命題４と命題５の区間 $[h_0, \overline{h_m}+\underline{h}]$ に定常解が１つ存在することを示している．

５．あとがき

本稿では内生的出生率を持つ経済成長モデルで男女分業について動学分析を行った．最適経路の存在や人的資本の最適経路の単調性と収束及び定常解の存在などを解明した．しかし，最適出生率の動き方についてはまだはっきり解明できていない．下方定常解より低い人的資本から出発する最適経路では，所得効果のため，人的資本の増加につれ，最適出生率は増加し，下方定常解より高い人的資本から出発する最適経路では，代替効果のため最適出生率は減少して行く可能性があると推測される．それを解明することは今後の課題である．

参考文献

[1] *Barro R. J., and Gary S. Becker, "Fertility in a Model of Economic Growth," Econometrica*, Vol. 57, No. 2, 1989, 481-501.

[2] Becker, and K. M. Murphy and Robert Tamura, *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, 1990, S12-S37.

[3] Becker, and J. H. Boyd III, *Capital Theory*, *Equilibrium Analysis and Recursive Utility*, Blackwell publishers, UK, 1997.

[4] Benhabib, Jess, and Kazuo Nishimura, "Endogenous Fluctuations in the Barro-Becker Theory of Fertility," in : *Demographic Change and Economic Development*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.

[5] 金谷貞男「性の分業・人的資本・人工転換」東京都立大学経済学会『経済と経済学』92 号　2002 年 8 月

[6] Qi Ling "Existence, Stability of the Optimal Path in the Endogenous Fertility Model," Mimeographed, 2002.

[7] Stokey. N. L., and R. E. Lucas Recursive Methods in Economic Dynamics, Harvard University Press, 1989.

付論

命題１の証明

１）男・女の市場財生産に携わる時間の割合 θ_m，θ_f に関する一階条件

lny の最大化条件から $\theta_m \geq 0$ に関する一階条件

$$\gamma A_{cm}h_m x-(1-\gamma)A_{xm}c \leq 0$$

から $1>\theta_m>0$ の時，

$$\frac{x}{c}=\frac{A_{xm}(1-\gamma)}{\gamma A_{cm}h_m} \tag{1}$$

を得る，ここで $c=\theta_m A_{cm}h_m T+\theta_f A_{cf}h_f(T-nt_0)$，$x=(1-\theta_m)A_{xm}T+(1-\theta_f)A_{xf}(T-nt_0)$.

一方，$\theta_f \geq 0$ に関する一階条件

$$\gamma A_{cf}h_f x-(1-\gamma)A_{xf}c \leq 0$$

から $0<\theta_f<1$ のとき，

$$\frac{x}{c}=\frac{(1-\gamma)A_{xf}}{\gamma A_{cf}h_f} \tag{2}$$

を得る，ここで $c=\theta_m A_{cm}h_m T+\theta_f A_{cf}h_f(T-nt_0)$，$x=(1-\theta_m)A_{xm}T+(1-\theta_f)A_{xf}(T-nt_0)$. 関数 y の θ_m と θ_f についての２階微分が負であるから以上の条件を満たす θ_m と θ_f は関数 y の最大点である．もし，両方とも内部の点で最大値を取れば，

$$\frac{A_{xm}}{A_{cm}}=\frac{A_{xf}}{A_{cf}}$$

になる．これは仮定１と矛盾する．従って，$h>2\underline{h}$ の時，一方端点の値を取るのか，それとも，両方が端点の値を取るのかのどちらかになる．以下で，ケースを分けて議論を行う．

まず，明らかに両方とも 0 と両方とも 1 になることがない．もし，$\theta_f=1$, $\theta_m=0$ とすれば，$\frac{x}{c}>\frac{A_{xm}(1-\gamma)}{\gamma A_{cm}}$ と $\frac{x}{c}<\frac{(1-\gamma)A_{xf}}{\gamma A_{cf}}$ が同時に満たされる．つまり，$\frac{A_{xm}}{A_{cm}}>\frac{A_{xf}}{A_{cf}}$ になる．これは仮定１に矛盾する[3]．同じように $\theta_m>0$ かつ $\theta_f=1$ が生じないことも証明できる．故に $\theta_f \neq 1$ が成立する．同じように $\theta_f>0$ のとき，$\theta_m=1$ になることは前の証明で証明できる．

２）$\theta_f=0$ の場合を考える．結論 $\theta_m<1 \Leftrightarrow n>\frac{T}{t_0}\left\{1-\frac{(1-\gamma)A_{xm}}{\gamma A_{xf}}\right\}$ に達する．

必要性は (1) から得られるので，充分性だけを証明する．背理法で証明する．もし逆に $n \leq \frac{T}{t_0}\left\{1-\frac{(1-\gamma)A_{xm}}{\gamma A_{xf}}\right\}$ とすれば，これを書き換えると $T-nt_0 \geq \frac{(1-\gamma)A_{xm}T}{\gamma A_{xf}}$ になる．つまり，$\gamma A_{xf}(T-nt_0) \geq (1-\gamma)A_{xm}T$ になる．両辺に $A_{cm}h_m$ を掛けると，

$$\gamma A_{cm}h_m x-(1-\gamma)A_{xm}c \geq 0 \tag{3}$$

３）同じように $\theta_m>0$ かつ $\theta_f=1$ が生じないことも証明できる．

になる．ここで $c=A_{cm}h_mT$，$x=A_{xf}(T-nt_0)$．式(3)の左辺は関数 y の $\theta_m=1$ 点の微係数である．関数 y の θ_m についての2階微分が負なので，すべての $0<\theta_m<1$ に対して，$\gamma A_{cm}h_mx-(1-\gamma)A_{xm}c>0$（$c=\theta_mA_{cm}h_mT$）が成立する．従って $\theta_m=1$ が y の最大値点である．つまり，$n>\frac{T}{t_0}\left\{1-\frac{(1-\gamma)A_{xm}}{\gamma A_{xf}}\right\}$ のとき，$\theta_m<1$ が証明される．

3）$\theta_m=1$ の場合を考える．この場合 $\theta_f>0\Leftrightarrow n<\frac{T}{t_0}\left[1-\frac{(1-\gamma)A_{cm}h_m}{\gamma A_{cf}h_f}\right]$ という結論を得る．

十分性だけを証明すればよい．背理法で証明する．もし $n\geq\frac{T}{t_0}\left[1-\frac{(1-\gamma)A_{cm}h_m}{\gamma A_{cf}h_f}\right]$ とすると，それを書き換えると，$T-nt_0\leq\frac{(1-\gamma)A_{cm}h_mT}{\gamma A_{cf}h_f}$ になる．不等式の両辺に A_{xf} を掛けると，

$$\gamma A_{cf}h_fx\leq(1-\gamma)A_{xf}c \tag{4}$$

を得る，ここで，$c=A_{cm}h_mT$，$x=A_{xf}(T-nt_0)$．式(4)の左辺は y の点 $\theta_f=0$ の微係数である．y の θ_f についての2階微分が負なので，$\theta_f>0$ の全ての点で $\gamma A_{cf}h_fx-(1-\gamma)A_{xf}c<0$（$x=(1-\theta_f)A_{xf}(T-nt_0)$）になる．つまり，$\theta_f=0$ が y の最大値点である．つまり，$n<\frac{T}{t_0}\left[1-\frac{(1-\gamma)A_{cm}h_m}{\gamma A_{cf}h_f}\right]$ とすれば，$\theta_f>0$ になる． QED

命題2の証明：

A）F の h に関する偏微分を計算する（$\theta_m=1$ と仮定する）

a）$\frac{\partial F}{\partial h}=\gamma A_{cm}Tc^{\gamma-1}x^{1-\gamma}$,（$h\leq\overline{h_m}+\underline{h}$）

b）$\frac{\partial F}{\partial h}=0$（$\theta_f=0,\ h>\overline{h_m}+\underline{h}$）

c）$\frac{\partial F}{\partial h}=\gamma\theta_fA_{cf}(T-nt_0)c^{\gamma-1}x^{1-\gamma}$（$\theta_f>0,\ h>\overline{h_m}+\underline{h}$）

生産関数 F は点 $\overline{h_m}+\underline{h}$ で h についての偏微分が存在しない．

次に F_{hh} を計算する．

$$\frac{\partial^2F}{\partial h^2}=\gamma(\gamma-1)c^{\gamma-2}x^{1-\gamma}A_{cm}^2T^2+\frac{\partial F_h}{\partial\theta_f}\frac{\partial\theta_f}{\partial h}\quad(h\leq\overline{h_m}+\underline{h})$$

ここで，$\frac{\partial F_h}{\partial\theta_f}=\gamma A_{cm}T\frac{\partial(c^{\gamma-1}x^{1-\gamma})}{\partial\theta_f}$，$\frac{\partial\theta_f}{\partial h}=-\frac{(1-\gamma)A_{cm}T}{A_{cf}h_f(T-nt_0)}$，$\left(\theta_f>0,\theta_f=\gamma-\frac{(1-\gamma)A_{cm}h_mT}{A_{cf}h_f(T-nt_0)}\right)$, そして付論の(2)から，

$$\frac{\partial(c^{\gamma-1}x^{1-\gamma})}{\partial\theta_f}=(\gamma-1)c^{\gamma-2}x^{-\gamma}(T-nt_0)[A_{cf}h_fx+A_{xf}c]\quad(h\leq\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f>0)$$

$$=-c^{\gamma-2}x^{1-\gamma}A_{cf}h_f(T-nt_0)$$

従って

$$\frac{\partial F_h}{\partial \theta_f}\frac{\partial \theta_f}{\partial h}=\gamma(1-\gamma)A_{cm}^2T^2c^{\gamma-2}x^{1-\gamma}$$

である．一方 $h>\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f>0$ の場合に

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial h}=\frac{(1-\gamma)A_{cm}h_mTA_{cf}}{A_{cf}^2h_f^2(T-nt_0)}$$

である．従って次の結果を得る：

1）$F_{hh}=0$（$h\leq\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f>0$）

2）$F_{hh}=\gamma(\gamma-1)c^{\gamma-2}x^{1-\gamma}A_{cm}^2T^2$（$h\leq\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f=0$）

3）$F_{hh}=0$（$h>\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f=0$）

4）$F_{hh}=\dfrac{\gamma(1-\gamma)}{h_f^2}c^{\gamma-1}x^{1-\gamma}[A_{cm}h_mT-\theta_fA_{cf}h_f(T-nt_0)]$（$h>\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f>0$）

B）F_n を計算する

$$\begin{aligned}F_n(h,\ n)&=-\gamma\theta_fA_{cf}h_ft_0c^{\gamma-1}x^{1-\gamma}-(1-\gamma)(1-\theta_f)A_{xf}t_0c^{\gamma}x^{-\gamma}+\frac{\partial F}{\partial \theta_f}\frac{\partial \theta_f}{\partial n}\\&=-t_0c^{\gamma-1}x^{-\gamma}[\gamma\theta_fA_{cf}h_fx+(1-\theta_f)(1-\gamma)A_{xf}c]\\&=-t_0(1-\gamma)A_{xf}c^{\gamma}x^{-\gamma}\end{aligned}$$

命題 1 の証明から，$\theta_f>0$ のとき，$\dfrac{\partial F}{\partial \theta_f}=0$ が分かる．$\theta_f=0$ のとき，$\dfrac{\partial \theta_f}{\partial n}=0$ から，いずれの場合，$\dfrac{\partial F}{\partial \theta_f}\dfrac{\partial \theta_f}{\partial n}=0$ になる．

C）F_{hn} を計算する

A）と同じ計算のやり方で

1）$F_{hn}=0$（$h<\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f>0$）

2）$F_{hn}=-\gamma(1-\gamma)t_0TA_{cm}A_{xf}c^{\gamma-1}x^{-\gamma}$（$h<\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f=0$）

3）$F_{hn}=0$（$h>\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f=0$）

4）$F_{hn}=-t_0\gamma^2(1-\gamma)A_{cf}A_{xf}c^{\gamma-1}x^{-\gamma}\left\{T-nt_0+\dfrac{A_{cm}h_mT}{A_{cf}h_f}\right\}$（$h>\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f>0$）

を得る．

D）F_{nn} を計算する

1）$F_{nn}=0$（$h<\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f>0$）

2）$F_{nn}=-t_0^2\gamma(1-\gamma)A_{xf}^2c^{\gamma}x^{-\gamma-1}$（$h<\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f=0$ ； $h>\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f=0$）

3）$F_{nn}=0$（$h>\overline{h_m}+\underline{h},\ \theta_f>0$）

を得る． QED

本文の第 3 節の分析は最適解の一階条件とオイラー方程式を用いて行うので，最適解は内部解であることを証明する必要がある．以下で，条件 4－5 の下で最適出生率と人的資本が内部解であることを証明する．

出生率が内部解である証明：

ここで $n \leq n_0^1$だけを証明する．

もし $n > n_0^1$とすると，命題 1 から，$\theta_m < 1$ になる．ケース a），b）について議論を行う．

a）$h > \overline{h_m} + \underline{h}$ というケースを考える．$h' > h$ と仮定する．もし，$(h_1, n') \notin G(h), n' \geq n_0^1$としたら，$(h'_1, n') \notin G(h')$ も成立することを証明する．

任意の h_1 に対して，$(h_1, n') \notin G(h), n' \geq n_0^1$としたら，ある $n < n_0^1$が存在して，

$$u[F(h, n) - nh_1] + \beta(n) V(h_1) > \max_{(h''_1, n') \in \Gamma(h)} u[F(h, n') - n' h''_1] + \beta(n') V(h''_1)$$

を満たす，ここで $n' \geq n_0^1$. 命題 1 より $h', h > \overline{h_m} + \underline{h}$ のとき，$F(h', n') = F(h, n')(n' \geq n_0^1)$ になる．即ち

$$\begin{aligned} & u[F(h', n) - nh_1] + \beta(n) V(h_1) > u[F(h, n) - nh_1] + \beta(n) V(h_1) \\ & > \max_{(h_1', n') \in \Gamma(h)} u[F(h, n') - n' h'_1] + \beta(n') V(h'_1) \\ & = \max_{(h_1', n') \in \Gamma(h')} u[F(h', n') - n' h'_1] + \beta(n') V(h'_1) \end{aligned}$$

従って，点 $h = h'$ で $n' \geq n_0^1$ は最適出生率ではない．

b）$h \leq \overline{h_m} + \underline{h}$ の場合

$R(h, n) \equiv u'[F(\overline{h_m} + \underline{h}, n)] F_n(2\underline{h}, n) + \beta'(n) V\left\{\dfrac{F(h, n)}{n}\right\}$ と $w(h, h_1, n) \equiv u[F(h, n) - nh_1] + \beta(n) V(h_1)$ をおく．n についての R の微分が負なので，仮定 4 から任意の $n \geq n_0^1$ に対して，$R(\overline{h_m} + \underline{h}, n) < R(\overline{h_m} + \underline{h}, n_0^1) < 0$ ということが分かる．任意 $h < \overline{h_m} + \underline{h}$ に対して，$R(h, n) < R(\overline{h_m} + \underline{h}, n)$ なので，$R(h, n) < R(\overline{h_m} + \underline{h}, n) < 0$ になる．

以下で $n \geq n_0^1$ と仮定する．十分小さい h に対して，もし，$2n\underline{h} > F(h, n)$ とすると，数 n の子供を産むことができない．以下で $2n\underline{h} \leq F(h, n)$ を満たす h を考える．効用関数が凹関数なので，$u'[F(h, n)] > u'[F(\overline{h_m} + \underline{h}, n)]$ になる．交叉偏微分 $F_{nh} \leq 0$ から，$F_n(h, n) \leq F_n(2\underline{h}, n) < 0$ が満たされる．従って任意の $(h_1, n) \in \Gamma(h)$ に対して，

$$u'[F(h, n) - nh_1][F_n(h, n) - nh_1] + \beta'(n) V(h_1) \leq R(\overline{h_m} + \underline{h}, n) < 0$$

が分かる．関数 $R(h, n)$ は $n \leq n_0^1$ に関して連続なので，n_0^1 の近くにある n に対して，$R(h, n) < 0$ になる．

一方，関数 w は n について凹関数であるから，

$$\begin{aligned} & u[F(h, n) - nh_1] + \beta(n) V(h_1) - u[F(h, n') - n' h_1] - \beta(n') V(h_1) \\ & < \{u'[F(h, n') - n' h_1] + \beta'(n') V(h_1)\}(n - n') < R_n(h, n') < 0. \end{aligned}$$

従って $h \leq \overline{h_m} + \underline{h}$ の場合に任意の h_1 に対して，$n \geq n_0^1$ が最適出生率にならない．(a)から，$h > \overline{h_m} + \underline{h}$ の場合にも $n \geq n_0^1$ は最適出生率ではない． QED

人的資本の最適経路が内部解である証明：

1）$F_h(2\underline{h}, n') > \dfrac{n}{\beta(n)}$ が満たされる（n，n' が任意）

$\dfrac{n\beta'(n)}{\beta(n)} < 1$ という仮定から，$\dfrac{d}{dn}\left(\dfrac{n}{\beta(n)}\right) = \dfrac{\beta(n) - n\beta'(n)}{\beta^2(n)} = \dfrac{1}{\beta(n)}\left\{1 - \dfrac{n\beta'(n)}{\beta(n)}\right\} > 0$ になる．

関数 $\dfrac{n}{\beta(n)}$ は n に関する増加関数である．

一方，$F_{hn} \leq 0$ から，$F_h(2\underline{h}, n') \geq F_h(2\underline{h}, n_0^1) > \dfrac{n_0^1}{\beta(n_0^1)} \geq \dfrac{n}{\beta(n)}$ が満たされる．ここで，n' と n が任意である．

2）人的資本の最適経路の内部性について

以下で仮定 5 の下で，人的資本の無限最適経路について議論する．

a）式

$$F_h[(2\underline{h}, n(2\underline{h})] > \frac{n}{\beta(n)} \frac{u'[F(h, n(h)) - 2n(h)\underline{h}]}{u'[F(2\underline{h}, n(2\underline{h})) - 2n(2\underline{h})\underline{h}]} \tag{5}$$

を満たす初期値 h に対して次期の最適値 $h_1 > 2\underline{h}$ ということを示す，ここで，$n(h) = n(h, 2\underline{h})$ である．

点 h で，(5) が満たされると仮定する．それに対して $\varepsilon > 0$ が存在し，

$$-n(h)u'[F(h, n(h)) - n(h)(2\underline{h} + \varepsilon)] + \beta(n(h))u'[F(2\underline{h} + \varepsilon, n(2\underline{h}))]F_h(2\underline{h} + \varepsilon, n(2\underline{h})) > 0$$

になれる．それから人的資本の経路 $h^2 \equiv (h, 2\underline{h}, \cdots, 2\underline{h}, \cdots)$ と $h^1 \equiv (h, 2\underline{h} + \varepsilon, 2\underline{h}, \cdots, 2\underline{h}, \cdots)$ を出生率経路 $(n(h), n(2\underline{h}), \cdots, n(2\underline{h}), \cdots)$ の下で比較すれば，

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{\infty} \Pi_{i=0}^{t} \beta(n_i) u[F(h_t^2, n_t) - n_t h_{t+1}^2] - \sum_{t=1}^{\infty} \Pi_{i=0}^{t} \beta(n_i) u[F(h_t^1, n_t) - n_t h_{t+1}^1] \\
&\quad = u[F(h, n(h)) - 2n(h)\underline{h}] + \beta(n(h))u\ [F(2\underline{h}, n(2\underline{h})) - n(h)(2\underline{h} + \varepsilon)] \\
&\qquad - \beta(n(h))u[F(2\underline{h} + \varepsilon, n(2\underline{h})) - 2n(2\underline{h})\underline{h}] \\
&\qquad \leq \{-n(h)u'[F(h, n(h)) - n(h)(2\underline{h} + \varepsilon)] + \beta(n(h))u'[F(2\underline{h} + \varepsilon, n(2\underline{h})) \\
&\qquad - 2n(2\underline{h})\underline{h}]F_h[2\underline{h} + \varepsilon, n(2\underline{h})]\}(-\varepsilon) < 0
\end{aligned}$$

になる，ここで，$\beta(n_0) = 1$．従って，点 h で $h_1 = 2\underline{h}$ が最適解ではない．

次に，$h_0 \equiv \min_h \{h : F(h, n(h)) - 2n(h)\underline{h} \geq F(2\underline{h}, n(2\underline{h})) - 2n(2\underline{h}\}\underline{h}$ と定義する．点 $h = h_0$ で (5) が満たされることが分かる．さらに $\overline{h_m} + \underline{h} > h_0$ と仮定する．

b）$h > h_0$ に対して，(5) が満たされる．

点 h で次期の人的資本の値を $h_1 = 2\underline{h}$ と仮定すると，次の式を

$$u'[F(h, n(h)) - 2n(h)\underline{h}][F_n(h, n(h)) - 2\underline{h}] + \beta'(n(h))V(2\underline{h}) = 0$$

を満たす．つまり

$$u'[F(h, n(h)) - 2n(h)\underline{h}] = -\frac{\beta'(n(h))V(2\underline{h})}{F_n(h, n(h)) - 2\underline{h}}.$$

同じように，$u'[F(h_0,\, n(h_0))-2n(h_0)\underline{h}]=-\dfrac{\beta'(n(h_0))V(2\underline{h})}{F_n(h_0,\, n(h_0))-2\underline{h}}$ も成立する．

ｂ１）もし $n(h)>n(h_0)$ とすると $u'[F(h,\, n(h))-2n(h)\underline{h}]\leq u'[F(h_0,\, n(h_0))-2n(h_0)\underline{h}]$ が満たされることを示す．

$\beta''<0$ から，$\beta'(n(h))<\beta'(n(h_0))$ となる．そして $F_{nn}\leq 0$ から，$F_n[h,\, n(h)]\leq F_n[h_0,\, n(h_0)]$ も成立する．そこで $u'[F(h,\, n(h))-2n(h)\underline{h}]\leq u'[F(h_0,\, n(h_0))-2n(h_0)\underline{h}]$ になる．

ｂ２)もし，$n(h)<n(h_0)$ とすれば，$u'[F(h,\, n(h))-2n(h)\underline{h}]<u'[F(h_0,\, n(h_0))-2n(h_0)\underline{h}]$ も満たされることを示す．

$n(h)<n(h_0)$ とすると，$F_n<0$ から，$F(h,\, n(h))>F(h_0,\, n(h_0))$ が成立する．そして，

$$F(h,\, n(h))-2n(h)\underline{h}>F(h_0,\, n(h_0))-2n(h_0)\underline{h}$$

になる．$u''<0$ から，

$$u'[F(h,\, n(h))-2n(h)\underline{h}]<u'[F(h_0,\, n(h_0))-2n(h_0)\underline{h}] \tag{6}$$

が成立する．

結果ｂ１）とｂ２）により，いずれの場合でも，(6) が成り立つので，点 $h=h_0$ で (5) が満たされるから，h でも (5) が満たされる．従って $h\geq h_0$ とすると，$h_1=2\underline{h}$ が最適次期の人的資本の値ではない．QED

(2002 年 8 月 19 日受領)